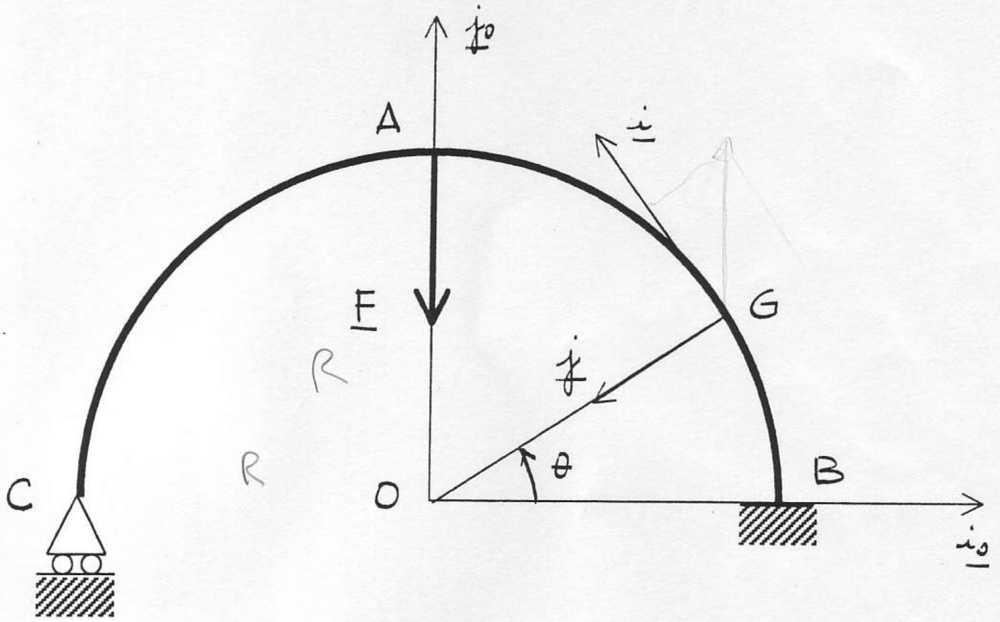
ENSGSI
1ère Année Ingénieur

lundi 5 mai 2003

THEORIE DES POUTRES

Durée : 3 h
Documents non autorisés

On considère la structure en forme de demi-cercle illustrée par la figure suivante : le rayon est R et la section droite est rectangulaire de largeur b et de hauteur h.



Elle est encastrée en B et repose en C sur un appui simple : elle est chargée en A par un effort concentré $\underline{F} = -F\ \underline{j}_0$.

Question 1 : définir les torseurs associés au chargement et aux réactions des appuis. Montrer que le système est hyperstatique extérieurement de degré un.

On choisira comme inconnue hyperstatique la réaction de l'appui simple : définir le système isostatique associé et donner la condition d'équivalence entre le système isostatique associé et le système réel.

Question 2 : rechercher les efforts intérieurs pour tout point G compris entre B et C, soit pour $\theta \in [0, \pi]$.

Question 3 : en ne tenant compte que de l'effort intérieur M_z les formules de Bresse s'écrivent :

$$\underline{\Omega}(C) = \underline{\Omega}(B) + \int_{s_B}^{s_C} \frac{M_z}{EI_z} \underline{k}\, ds$$

$$\underline{U}(C)=\underline{U}(B)+\underline{\Omega}(B)\wedge\underline{BC}+\int_{s_B}^{s_C}\left[\frac{M_z}{EI_z}\underline{k}\wedge\underline{GC}\right]ds$$

Déterminer l'inconnue hyperstatique en ne tenant compte que de l'effort intérieur M_z.

Question 4 : calculer, dans ces conditions, le déplacement du point A, point d'application de l'effort.

Question 5 : les caractéristiques géométriques sont R=3 m, b=0,1 m et h=0,05 m. Le matériau est de l'acier dont le module d'Young vaut E=210 GPa.

Donner, en fonction de l'effort F, les expressions numériques des efforts intérieurs et calculer le déplacement du point A. Tracer les différents diagrammes pour F=1 N.

Remarque : pour une section rectangulaire, le moment quadratique est $I_z=\frac{bh^3}{12}$.

Question 6 : la contrainte normale induite par l'effort normal N et le moment fléchissant M_z est $\sigma_x=\frac{N}{S}-\frac{M_z y}{I_z}$. Donner, en fonction de l'effort F et de y, l'expression numérique de la contrainte normale.

Question 7 : le déplacement maximum du point A est fixé à 0,02 m et la limite élastique de l'acier utilisé est de l'ordre de R_e=240 MPa. Déterminer l'effort maximum que peut supporter la structure.

1. Efforts extérieurs

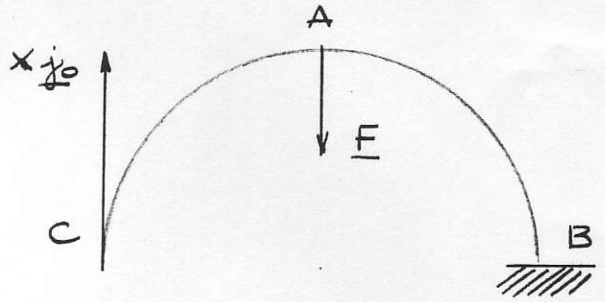
$$\mathcal{T}_A \left| \begin{array}{l} \underline{R}(\mathcal{T}_A) \\ \qquad R_0 \\ \underline{m}(\mathcal{T}_A, A) = \underline{0} \end{array} \right. \begin{array}{|l} 0 \\ -F \\ 0 \end{array} \qquad \mathcal{T}_B \left| \begin{array}{l} \underline{R}(\mathcal{T}_B) \quad R_0 \begin{array}{|l} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{array} \\ \underline{m}(\mathcal{T}_B, B) \quad R_0 \begin{array}{|l} 0 \\ 0 \\ Z_B \end{array} \end{array} \right. \qquad \mathcal{T}_C \left| \begin{array}{l} \underline{R}(\mathcal{T}_C) \\ \qquad R_0 \\ \underline{m}(\mathcal{T}_C, C) = \underline{0} \end{array} \right. \begin{array}{|l} 0 \\ Y_C \\ 0 \end{array}$$

* équilibre $\mathcal{T}_A + \mathcal{T}_B + \mathcal{T}_C = 0 \implies$

$$X_B = 0$$
$$Y_C + Y_B - F = 0$$
$$Z_B - 2RY_C + RF = 0$$

4 inconnues, 3 équations ⇒ le système est hyperstatique extérieurement de degré 1. On choisi Y_C comme inconnue $\Rightarrow Y_C = X$.

* système isostatique associé



$$X_B = 0$$
$$Y_B = F - X$$
$$Z_B = 2RX - RF$$

* condition d'équivalence $v(C) = 0$

2. Efforts intérieurs

$$\underline{GA} = \underline{OA} - \underline{OG} \quad R_0 \left| \begin{array}{l} 0 - R\cos\theta \\ R - R\sin\theta \\ 0 \quad 0 \end{array} \right.$$

* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$: $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{\text{droit}} = \mathcal{T}_A + \mathcal{T}_C$

$$\underline{R}(\mathcal{T}_i) \quad R_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ -F + X \\ 0 \end{array} \right. \qquad R \left| \begin{array}{l} (-F+X)\cos\theta \\ -(-F+X)\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.$$

sachant que $\underline{j_0} = \cos\theta\, \underline{i} - \sin\theta\, \underline{j}$

$$\underline{m}(\mathcal{T}_i, G) = \underline{m}(\mathcal{T}_A, A) + \underline{GA} \wedge \underline{R}(\mathcal{T}_A) + \underline{m}(\mathcal{T}_C, C) + \underline{GC} \wedge \underline{R}(\mathcal{T}_C) \quad R \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ FR\cos\theta - XR(1+\cos\theta) \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left| \begin{array}{l} N_1 = -(F-X)\cos\theta \\ T_{y_1} = (F-X)\sin\theta \\ M_{z_1} = FR\cos\theta - XR(1+\cos\theta) \end{array} \right.$$

$$\underline{GC} = \underline{OC} - \underline{OG} \left| \begin{array}{l} -R - R\cos\theta \\ 0 - R\sin\theta \end{array} \right.$$

* $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$: $\quad \mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{droite} = \mathcal{T}_C$

$$\left| \begin{array}{l} N_2 = X\cos\theta \\ T_{y_2} = -X\sin\theta \\ M_{z_2} = -XR(1+\cos\theta) \end{array} \right.$$

3. Inconnue hyperstatique

La condition d'équivalence s'écrit $[\underline{U}(C) - \underline{U}(B)].\underline{j_0} = 0$: la seconde formule de Bresse donne

$$\underline{U}(C) = \underset{\underset{0}{\parallel}}{\underline{U}(B)} + \underset{\underset{0}{\parallel}}{\underline{\Omega}(B)} \wedge \underline{BC} + \int_B^C \frac{M_z}{EI_z} \underline{k} \wedge \underline{GC}\, ds$$

de

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} -R(1+\cos\theta) \\ -R\sin\theta \\ 0 \end{array} \right._{R_0}$$

sorte que

$$\int_0^\pi (M_z \underline{k} \wedge \underline{GC}).\underline{j_0}\, ds = 0.$$

$$\int_0^\pi M_z(1+\cos\theta)\,d\theta = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[FR\cos\theta - XR(1+\cos\theta)\right](1+\cos\theta)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -XR(1+\cos\theta)^2\,d\theta = 0$$ ce qui

conduit à $X = \dfrac{4+\pi}{6\pi} F$

Récapitulatif :

$$N_1 = -\frac{5\pi-4}{6\pi}F\cos\theta \qquad N_2 = \frac{4+\pi}{6\pi}F\cos\theta$$

$$T_{y_1} = \frac{5\pi-4}{6\pi}F\sin\theta \qquad T_{y_2} = -\frac{4+\pi}{6\pi}F\sin\theta$$

$$M_{z_1} = -\frac{4+\pi}{6\pi}FR\left(1 - \frac{5\pi-4}{4+\pi}\cos\theta\right) \qquad M_{z_2} = -\frac{4+\pi}{6\pi}FR(1+\cos\theta)$$

4. Déplacement du point A

$$\underline{U}(A) = \underset{\underset{0}{\parallel}}{\underline{U}(B)} + \underset{\underset{0}{\parallel}}{\underline{\Omega}(B)} \wedge \underline{BA} + \int_B^A \frac{M_z}{EI_z} \underline{k} \wedge \underline{GA}\, ds$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} -R\cos\theta \\ R(1-\sin\theta) \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\underline{U}(A) = \underbrace{\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{M_{z_1}}{EI_z} R^2(1-\sin\theta)\,d\theta\right]}_{u_0(A)} \underline{i_0} + \underbrace{\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{M_{z_1}}{EI_z} R^2\cos\theta\,d\theta\right]}_{v_0(A)} \underline{j_0}$$

$$u_0(A) = \frac{\pi^2 - 3\pi - 4}{12\pi} \quad \frac{FR^3}{EI_z}$$

$$v_0(A) = \frac{-5\pi^2 + 8\pi + 16}{24\pi} \quad \frac{FR^3}{EI_z}$$

5. Application numérique

* $N_1 = -0,621 \, F \cos\theta$ $\qquad$ $N_2 = 0,379 \, F \cos\theta$

$T_{y1} = 0,621 \, F \sin\theta$ $\qquad$ $T_{y2} = -0,379 \, F \sin\theta$

$M_{z1} = -1,137 \, F \; (1 - 1,639 \cos\theta)$ $\qquad$ $M_{z2} = -1,137 \, F \; (1 + \cos\theta)$

* $u_0(A) = -1,164.10^{-5} \, F$

$v_0(A) = -1,345 \, .10^{-5} F$

6. Contrainte normale

$$\sigma_x = \frac{N}{S} - \frac{M_z y}{I_z}$$

$\sigma_x^1 = -1,242.10^2 F\cos\theta + 1,091.10^6 (1 - 1,639 \cos\theta).$

$\sigma_x^2 = 0,757.10^2 F\cos\theta + 1,091.10^6 (1 + \cos\theta) \, Fy$

remarque : l'influence de l'effort normal est négligeable.

7. Dimensionnement

* $U(A) = \sqrt{u_0^2(A) + v_0^2(A)} = 1,779 \, .10^{-5} F$

$U(A) \leq 0,02 \implies F \leq 1124 \text{ N}$

* l'influence de l'effort normal est négligée :

$\max |\sigma_x^1| = 1,091.10^6 \times 0,025 \, F \leq 240.10^6 \implies F \leq 8799 \text{ N}$

obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $y = 0,025$

Le dimensionnement vis à vis du déplacement est le plus exigeant.